

العنوان:	الترشيح والتنبؤ لمعلومات النماذج الحركية في الأزمنة المتقطعة باستخدام أسلوب بيز
المؤلف الرئيسي:	الرسام، ريا سالم محمد على
مؤلفين آخرين:	جليل، طالب شريف(مشرف)
التاريخ الميلادي:	2004
موقع:	الموصل
الصفحات:	1 - 115
رقم MD:	552894
نوع المحتوى:	رسائل جامعية
اللغة:	Arabic
الدرجة العلمية:	رسالة دكتوراه
الجامعة:	جامعة الموصل
الكلية:	كلية علوم الحاسبات والرياضيات
الدولة:	العراق
قواعد المعلومات:	Dissertations
مواضيع:	النماذج الحركية، الأزمنة المتقطعة، الترشيح، الاحصاء، اسلوب بيز
رابط:	http://search.mandumah.com/Record/552894

الترشيح والتنبيه لعلمات النماذج الحركية في الأزمنة المتقطعة باستخدام أسلوب بيز

أطروحة تقدمت بها

ريا سالم محمد علي الرسام

إلى

مجلس كلية علوم الحاسبات والرياضيات في جامعة الموصل
وهي جزء من متطلبات نيل شهادة دكتوراه فلسفة في علوم الإحصاء

بإشراف

الأستاذ المساعد

الدكتور طالب شريف جليل

٢٠٠٤م

١٤٢٥هـ

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

قُلْ إِنَّمَا الْعِلْمُ عِنْدَ اللَّهِ

وَإِنَّمَا أَنَا تَذِيرٌ مُبِينٌ

بِسْمِ اللَّهِ
الْعَظِيمِ

سورة الملك
الآية (٣١)

قرار لجنة المناقشة

نشهد نحن أعضاء لجنة التقويم والمناقشة بأننا اطلعنا على هذه الأطروحة ، وقد ناقشنا الطالبة في محتوياتها ، وفيما له علاقة بها بتاريخ ٢٠٠٤/١٢/٨ ، وهي جديرة لنيل شهادة دكتوراه فلسفة في اختصاص الإحصاء .

توقيع

أ. د. عبد المجيد حمزة الناصر
رئيس لجنة المناقشة

توقيع

أ. د. باسل يونس ذنون
عضو لجنة المناقشة

توقيع

أ. م. د. محمد نذير إسماعيل
عضو لجنة المناقشة

توقيع

أ. م. د. عبد الغفور جاسم سالم
عضو لجنة المناقشة

توقيع

أ. م. د. حسن محمد الياس
عضو لجنة المناقشة

توقيع

أ. م. د. طالب شريف جليل
عضو لجنة المناقشة (المشرف)

قرار مجلس الكلية

اجتمع مجلس كلية علوم الحاسبات والرياضيات بجلسته
وقرر :
المنعقدة / / ٢٠٠٥

مقرر مجلس الكلية

التوقيع :

الاسم : أ. م. د. ظافر رمضان مطر

التاريخ : / / ٢٠٠٥

عميد الكلية

التوقيع :

الاسم : أ. د. نزار حمدون شكر

التاريخ : / / ٢٠٠٥

شكر وتقدير

يطيب لي وأنا أنتهي من إعداد هذه الأطروحة أن أتوجه إلى الله العلي القدير بخالص الحمد والشكر على ما منّ به عليّ من عونٍ ومساعدة لإنجازها.

وعرفاناً بالجميل أتقدم بجزيل شكري وعظيم امتناني لأستاذي الفاضل الأستاذ المساعد الدكتور طالب شريف جليل لإشرافه على هذه الأطروحة، ولما قدمه لي من مساعدات كثيرة، ودعم كبير، وتوجيهات متواصلة أثناء فترة إعداد هذه الأطروحة ولما أبداه من روح علمية مخلصه فكان لملاحظاته القيمة وتوجيهاته السديدة ومناقشته الغنية أبلغ الأثر في إعداد الأطروحة بشكلها ومضمونها الحاليين.

كما أقدم شكري للسيد عميد كلية علوم الحاسبات والرياضيات والسيد رئيس قسم الإحصاء الدكتور حسن محمد الياس الذي كان حريصاً جداً على متابعتي لإنجاز العمل.

وأتقدم بشكري وامتناني للأساتذة الأفاضل (لجنة المناقشة) لتفضلهم بقبول مناقشة هذه الأطروحة وإغنائها ودعمها بأرائهم وتوجيهاتهم العلمية القيمة لجعلها أكثر رصانة وعلمية.

كما أتقدم بالعرفان والامتنان لزوجي وولدي (محمود وحسن) لصبرهم الطويل أثناء فترة إعداد هذه الأطروحة.

رَبِّا

قائمة المحتويات

الصفحة	الموضوع	التسلسل
الفصل الأول: المقدمة		
1	مقدمة عامة	1.1
2	النماذج الحركية	1.2
3	بعض أشكال النماذج الحركية الخطية	1.2.1
7	مسألة الترشيح	1.3
9	مرشح كالمن المتقطع	1.4
10	مرشح كالمن الموسع	1.5
11	تكوين النموذج الحركي الخطي	1.6
15	نبذة تاريخية	1,7
20	نبذة مختصرة عن فصول الأطروحة	1,8
الفصل الثاني : ترشيح وتنبؤ معاملات النموذج الحركي الخطي الطبيعي		
24	ترشيح معاملات النموذج الحركي الخطي الطبيعي (عندما σ^2 معلوم)	2,1
29	ترشيح معاملات النموذج الحركي الخطي الطبيعي المركب لفترات زمنية متساوية	2,1,1
31	ترشيح معاملات النموذج الحركي الخطي الطبيعي لفترات زمنية غير متساوية	2,1,2
32	تنبؤ معاملات النموذج الحركي الخطي الطبيعي (عندما σ^2 معلوم)	2,2
33	تنبؤ معاملات النموذج الحركي الخطي الطبيعي المركب لفترات زمنية متساوية	2.2.1
35	تنبؤ معاملات النموذج الحركي الخطي الطبيعي المركب لفترات زمنية غير متساوية	2,2,2
37	ترشيح معاملات النموذج الحركي الخطي الطبيعي (عندما σ^2 غير معلوم)	2.3
42	ترشيح معاملات النموذج الحركي الخطي الطبيعي المركب لفترات زمنية متساوية	2,3,1

43	ترشيح معلمات النموذج الحركي الخطي الطبيعي المركب لفترات زمنية غير متساوية	٢,٣,٢
٤٤	تنبؤ معلمات النموذج الحركي الخطي الطبيعي (عندما σ^2 غير معلوم)	2.4
٤٧	تنبؤ معلمات النموذج الحركي الخطي الطبيعي المركب لفترات زمنية متساوية	٢,٤,١
٤٨	تنبؤ معلمات النموذج الحركي الخطي الطبيعي المركب لفترات زمنية غير متساوية	٢,٤,٢
الفصل الثالث : ترشيح وتنبؤ معلمات النموذج الحركي الخطي العام		
٥٠	نماذج العائلة الأسية	٣,١
٥٠	توزيعات المشاهدات في العائلة الأسية	٣,١,١
٥١	التحليل المرافق	٣,١,٢
٥٤	النماذج الحركية الخطية العامة	٣,٢
٦١	تحديث النماذج الحركية الخطية العامة	٣,٣
٦٨	الترشيح والتنبؤ لخطوة مستقبلية h	٣,٤
الفصل الرابع : ترشيح وتنبؤ معلمات النموذج الحركي اللاخطي		
٧٢	التقريب باستخدام الرتبة الأولى لمفكوك تايلر	٤,١
٧٤	ترشيح معلمات النموذج الحركي اللاخطي	٤,١,١
٧٨	التوزيع التنبؤي لمعلمة النموذج الحركي اللاخطي	٤,١,٢
٧٩	التقريب باستخدام الرتبة الثانية لمفكوك تايلر	٤,٢
الفصل الخامس : الجانب التطبيقي		
٨٤	المقدمة	٥,١
٨٥	توضيح الترشيح والتنبؤ لمعلمة النموذج باستخدام مشاهدات مولدة	٥,٢
١٠١	الجانب التطبيقي (البيانات الحقيقية)	٥,٣
الاستنتاجات والتوصيات		
١٠٦	الاستنتاجات	
١٠٧	التوصيات	
١٠٨	المصادر	
	الملاحق	

المستخلص

تم في هذا البحث ترشيح (Filtering) وتنبؤ (Prediction) معلمات بعض النماذج الحركية في حالة الأزمنة المتقطعة باستخدام أسلوب بيز (Bayesian Approach) ، إذ أن الترشيح والتنبؤ يمثلان حالتين لتقدير معلمة النموذج الحركي أو متغير الحالة (State Variable) .

تناولنا في هذا البحث ثلاثة أنواع من النماذج الحركية وهي النموذج الحركي الخطي الطبيعي (DLM) ، والنموذج الحركي الخطي العام (DGLM) ، والنموذج الحركي اللاخطي الطبيعي (NLDM) .

بالنسبة للنموذج الحركي الخطي تم إيجاد الترشيح والتنبؤ لمعاملات هذا النموذج في حالة كون تباين خطأ المشاهدات معلوماً (known) كتمهيد للحالة الأكثر عمومية وواقعية وهي حالة كون تباين خطأ المشاهدات غير معلوم (unknown) حيث تم استخدام تحليل بيز المتسلسل في تقدير معلمات هذا النموذج ، وبعد ذلك تم إيجاد التوزيع التنبؤي لـ h خطوة مستقبلية للمشاهدة y_t .

أما بالنسبة للنموذج الحركي الخطي العام وهو النموذج الذي ليس من الضروري أن تتوزع مكوناته توزيعاً طبيعياً مما يجعل استخدام أسلوب تحليل بيز المتسلسل في إيجاد الترشيح والتنبؤ لمعاملات النموذج أكثر تعقيداً ، حيث نلاحظ أن أغلب الدراسات حول هذا النموذج تستخدم طرق المحاكاة أو طرق تطبيقية عن طريق الحاسوب لغرض تقدير معلمات هذا النموذج ، إلا أن الدراسة النظرية الوحيدة تمت من قبل (West , et. al. , 1985) باستخدام العائلة الآسية لتسهيل عملية إجراء الترشيح والتنبؤ لمعاملات هذا النموذج لذلك كان لابد لنا من توضيح هذه الطريقة بشكل تفصيلي لبيان أهمية استخدامها وخصوصاً في حالة تقدير المعلمات باستخدام أسلوب بيز وذلك بسبب استخدام العائلة المرافقة (Conjugate Family) لغرض إيجاد التوزيع السابق واللاحق لمعاملات النموذج الحركي .

أما النموذج الحركي اللاخطي فهو الأكثر عمومية وواقعية وذلك لكون أكثر المظاهر في الحقيقة تسلك سلوكاً غير خطياً . فقد تناولنا هذا النموذج عندما تكون مكوناته تتوزع توزيعاً طبيعياً فقط وذلك بسبب صيغته المعقدة وصعوبة تقدير معلماته نظرياً . لذلك لغرض ترشيح وتنبؤ معلمات هذا النموذج استخدمنا مفكوك سلسلة تايلر للدالة اللاخطية الى الرتبة الأولى مرةً وإلى الرتبة الثانية مرةً أخرى .

كما تم تطبيق النتائج النظرية أولاً على بيانات مولدة وثنائياً على بيانات حقيقية تمثل المعدلات الشهرية لدرجات الحرارة العظمى والصغرى في مدينة الموصل لأحد النماذج التي تم عرضها في الفصل الأول ، وهو النموذج الحركي الخطي المركب (في حالة الأزمنة المتساوية بين المشاهدات) ، وتم بالتالي مقارنة قيمة المشاهدة الحقيقية y_t مع معدل التوزيع التنبؤي لهذه المشاهدات لـ h خطوة مستقبلية وكذلك توضيح الخطأ التنبؤي عن طريق الرسم .

1

الفصل الأول

المقدمة

Introduction

الفصل الأول

المقدمة

Introduction

1.1 مقدمة عامة :

لقد نالت مسألة التقدير (Estimation) اهتماماً كبيراً في التطبيقات الإحصائية في مجالات هندسة الاتصالات، والاقتصاد... الخ، لما تقدمه من وسائل تمكن من التعرف بصورة أكثر دقة على القيم الحقيقية للعديد من المعلمات (أو متغيرات الحالة) لعمليات مشوبة بأخطاء عشوائية.

وبعد ما حقق التقدير من نتائج باهرة في المجالات العلمية المختلفة ظهر الاهتمام في الآونة الأخيرة بما يسمى تقدير متغيرات الحالة (State Estimation)، لما تشتمل عليه هذه المتغيرات لتمثل كثير من الحالات التي يمكن أن نرمز لها بـ (θ_t) وبدليل زمني t لكونها تتغير مع الزمن، أي أن لها خاصية حركية (أو ديناميكية).

وقد عرف كالمن (Kalman, 1961) التقدير لـ θ_t أكثر شمولاً باستخدام البيانات (أو

المعلومات) D_s حيث أن $D_s = \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_s\}$ أي $m_{t/s} = E(\theta_t | D_s)$.

بالاعتماد على t و s ، يسمى التوقع الشرطي $m_{t/s}$ بالتنبؤ (Prediction) إذا كانت $t > s$ ، وبالترشيح (Filtering) إذا كانت $t = s$ والتمهيد (Smoothing) إذا كانت $t < s$.

وقع اختيار موضوع البحث على النوع الأول والثاني أي التنبؤ والترشيح فضلاً عن تنبؤ القيم المستقبلية للملاحظات. وبالنسبة للترشيح اختص البحث بأحد أنواع المرشحات الشائعة والمسمى بمرشح كالمن (Kalman Filter) للحالتين الخطية واللاخطية لبعض النماذج الحركية. بشكل خاص يركز البحث على مرشح كالمن الخطي لكونه يحتل مكانة بارزة في التطبيقات العلمية والهندسية والمعالجة الصورية (Geradts, 1999) و (Hurn, et.al, 2000).

1.2 النماذج الحركية: Dynamic Models

يعرف النموذج الحركي بشكل عام كالآتي:

$$y_t = f_t(\theta_t, v_t) \quad \text{معادلة الملاحظة} \quad \dots\dots(1.1)$$

$$\theta_t = g_t(\theta_{t-1}, w_t) \quad \text{معادلة النظام} \quad \dots\dots(1.2)$$

حيث أن $t=1,2,\dots,T$ دليل الزمن، المتجه y_t يمثل المشاهدات والذي يمكن ملاحظته بينما θ_t الذي يسمى متجه معلمة النظام (System Parameter) أو متغير الحالة (State Variable) لا يمكن ملاحظته.

أما w_t, v_t فتمثل الأخطاء العشوائية، كل واحدة غير مترابطة فيما بينها وتتوزع توزيعاً مستقلاً عن بقية المتغيرات (Mutually Independently Distributed)، التي يفترض لها توزيع طبيعي (Normal Distribution) أو ما يسمى بـ (Gaussian Distribution) ولكن ليس بالضرورة.

وأن $f_t(\dots)$ و $g_t(\dots)$ تمثل دوال متجه (Vector Functions)، التي يفترض أن تكون معروفة وربما تعتمد على متغيرات خارجية أخرى.

المعادلة (1.1) تسمى بمعادلة الملاحظة (Observation Equation)، التي تمثل العلاقة بين المشاهدات فعلاً y_t و متغير الحالة θ_t الذي يمثل حالة داخلية للنظام (Internal State of System) وغير قابلة للملاحظة (Unobservable).

المعادلة (1.2) توضح ربط متغير الحالة بين الزمن السابق ($t-1$) والزمن الحالي (t) والتي تشير إلى حركة متغير الحالة، والتي تسمى بمعادلة النظام (System Equation).

يكتب النموذج أعلاه المعرف في المعادلتين (1.1) و (1.2) في العديد من البحوث بشكل تكون فيه الأخطاء مضافة (Superimposed or Additive) إلى الدالة أي أن النموذج أعلاه يكتب بالشكل الآتي:

$$y_t = f_t(\theta_t) + v_t \quad \dots\dots(1.3)$$

$$\theta_t = g_t(\theta_{t-1}) + w_t \quad \dots\dots(1.4)$$

ويفترض أن تكون الدوال $f_t(\theta_t)$ و $g_t(\theta_{t-1})$ دوال قابلة للاشتقاق (Differentiable) بالنسبة لـ θ_t .

فإذا كانت $f_t(\theta_t)$ و $g_t(\theta_{t-1})$ دوال خطية عندئذ فإن النموذج المعرف في (1.3) و (1.4) يدعى نموذج حركي خطي (DLM)، (لاحظ Harrison and Stevens, 1971;

1976 و West, M.et.al, 1985). ويعكس ذلك أي إذا كانت الدالتان أعلاه أو على الأقل واحدة منهما لاخطية عندئذٍ يعرّف النموذج الموضح في المعادلتين (1.3) و (1.4) بنموذج حركي لا خطي (Non-Linear Dynamic Model)، (انظر Fisher and Stear, 1967 و Netto et al., 1978 و Lainiotis and Papaparaskeva, 1999).

1.2.1 بعض صيغ النماذج الحركية الخطية:

يعبر عن النموذج الحركي الخطي بصورة عامة بالصيغة الآتية :

$$\left. \begin{array}{l} \text{معادلة المشاهدات} \quad y_t = F_t \theta_t + v_t \\ \text{معادلة النظام} \quad \theta_t = G_t \theta_{t-1} + w_t \end{array} \right\} t=1,2,\dots$$

حيث أن:

t : تمثل دليل الزمن.

y_t : تمثل متجه مشاهدات النموذج وهو ذو بعد $(n \times 1)$ والمأخوذة عند الزمن t .

F_t : مصفوفة المتغيرات غير العشوائية وهي ذات بعد $(n \times k)$ وتكون معلومة عند الزمن t .

θ_t : متجه معاملات النموذج عند الزمن t وهو ذو بعد $(k \times 1)$ ، ويسمى أيضاً بمتجه الحالة أو النظام (State or System Vector)، ويكون غير معلوم بالضبط.

G_t : مصفوفة النظام أو مصفوفة التطور (Evolution) وهي ذات بعد $(k \times k)$ وتكون معلومة عند الزمن t .

v_t : متجه خطأ المشاهدة عند الزمن t وهو ذو بعد $(n \times 1)$ ويتوزع توزيعاً طبيعياً بوسط (0) ومصفوفة تباين V_t نفترض أنها معلومة عند الزمن t ووصفياً يعبر عن توزيع v_t كما يأتي:

$$v_t \sim N(0, V_t)$$

w_t : متجه خطأ النظام عند الزمن t وهو ذو بعد $(k \times 1)$ ويتوزع توزيعاً طبيعياً بوسط (0) ومصفوفة تباين W_t نفترض أنها معلومة عند الزمن t ، أي أن:

$$w_t \sim N(0, W_t)$$

وأيضاً نفرض أن الأخطاء v_t ، w_t كل واحدة منهما غير مترابطة فيما بينها ومستقلة عن بقية المتغيرات.

❖ أهم أنواع النموذج الحركي الخطي:

1- نموذج التدرج (Step Model):

يستخدم هذا النموذج في الحالات التي يكون فيها مستوى (معدل) العملية مستقراً لفترة قصيرة الأمد ثم يتغير إلى مستوى آخر، ويدعى هذا التغير بالقفز (Jump) ثم يرجع أو لا يرجع إلى الاستقرار ... وهكذا. يدعى النموذج بنموذج التدرج لأن سلسلة التحولات من مستوى إلى آخر تكون على شكل درج أو سلم.

وللنموذج تطبيقات في مجالات شتى كالاقتصاد (Harrison and Stevens, 1976) والسيطرة النوعية (Jalil, 1988). ويمكن التعبير عن هذا النموذج في حالة أحادي البعد (Scalar) كالتالي:

$$\text{معادلة مشاهدة} \quad y_t = \mu_t + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad \text{i.i.d}$$

$$\text{معادلة النظام} \quad \mu_t = \mu_{t-1} + \delta\mu_t \quad \delta\mu_t \sim N(0, \sigma^2 r\mu) \quad \text{i.i.d}$$

إذ أن μ_t يطلق عليها غالباً معدل مستوى العملية (Process Level Mean) عند الزمن t .

2- نموذج النمو الحركي الخطي: (Dynamic Linear Growth Model)

يوافق هذا النموذج العديد من التطبيقات، إذ يستخدم عندما يكون هناك تغير في عامل الميل (Slope Factor) لمستوى العملية الممثلة بالنموذج عند نقطة من الزمن، أو حصول نمو (Growth) في المستوى، يدعى هذا التغير في الاقتصاد بـ (Trend) وفي السيطرة النوعية بـ (Drift). ويمكن التعبير عن هذا النموذج كالتالي:

$$\text{معادلة المشاهدة} \quad y_t = \mu_t + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad \text{i.i.d}$$

$$\text{معادلة النظام} \quad \begin{cases} \mu_t = \mu_{t-1} + \beta_t \\ \beta_t = \beta_{t-1} + \delta\beta_t \end{cases} \quad \delta\beta_t \sim N(0, \sigma^2 r\beta) \quad \text{i.i.d}$$

حيث أن:

β_t : يمثل عامل الميل عند الزمن t أو (Drift Parameter).

3- النموذج الحركي الخطي المركب: (Combined Dynamic Linear Model)

يستخدم هذا النموذج في الحالات التي يحدث فيها كلا النوعين من التغيرات للمستوى في نفس الوقت، وهما تغير في معدل المستوى وتغير في ميل المستوى، ولذلك أطلقنا عليه النموذج الحركي الخطي المركب. سوف نقوم بتناول هذا النموذج في حالة أخذ المشاهدات y_t في فترات زمنية متساوية وفي فترات زمنية غير متساوية (Equally and Unequally Spaced Intervals)

a- النموذج الحركي الخطي المركب (في أزمنة متساوية):

يمكن التعبير عن هذا النموذج كالاتي:

$$\left. \begin{array}{l} \text{معادلة المشاهدات} \\ y_t = \mu_t + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad i.i.d \\ \text{معادلة النظام} \\ \left\{ \begin{array}{l} \mu_t = \mu_{t-1} + \beta_t + \delta\mu_t \quad \delta\mu_t \sim N(0, \sigma^2 r\mu) \quad i.i.d \\ \beta_t = \beta_{t-1} + \delta\beta_t \quad \delta\beta_t \sim N(0, \sigma^2 r\beta) \quad i.i.d \end{array} \right. \end{array} \right\} \dots(1.5)$$

بفرض أن الأخطاء $(\varepsilon_t, \delta\mu_t, \delta\beta_t)$ غير مترابطة فيما بينها ومستقلة بعضها عن بعض وعن المتغيرات الأخرى.

b- النموذج الحركي الخطي المركب (في أزمنة غير متساوية):

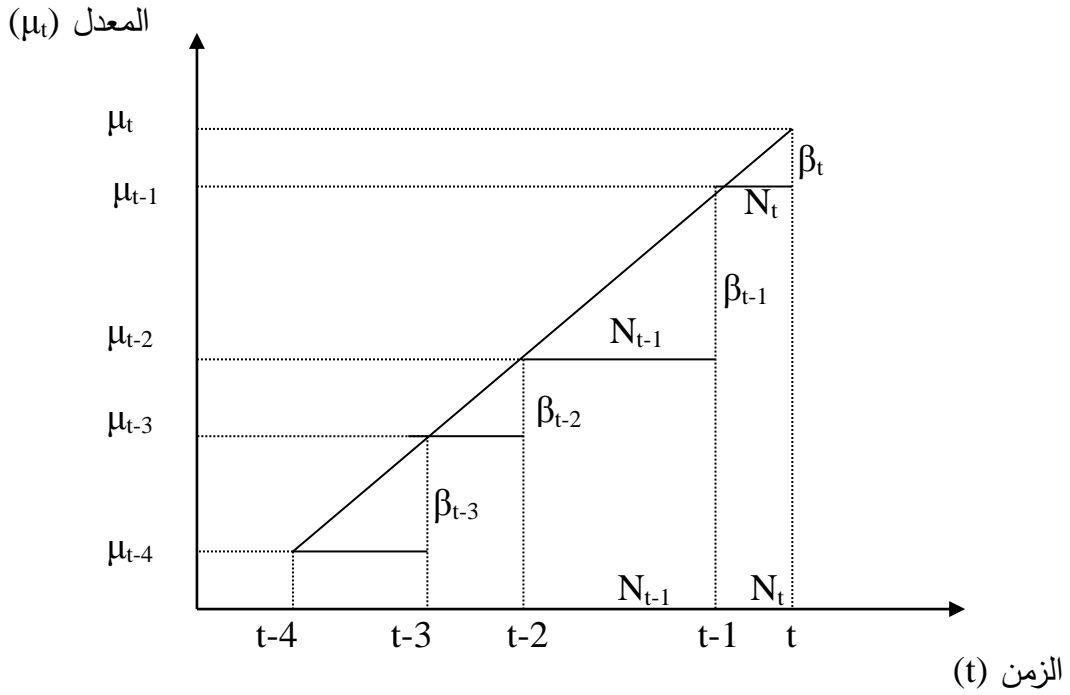
في النموذج أعلاه تناولنا النموذج الحركي المركب عند أخذ مشاهدات في فترات زمنية متساوية، وسوف نتناول هنا النموذج عند أخذ المشاهدات في فترات زمنية غير متساوية. اقترحت حالة أخذ المشاهدات في فترات زمنية غير متساوية مع النماذج الحركية الخطية من قبل (Smith, et al., 1982).

إن إسقاط القيد (تساوي الفترات الزمنية في أخذ المشاهدات) في النموذج تزيد من مرونة استخدامه في مجالات الحياة العملية وبشكل أكبر في المجال الطبي فمثلاً الطبيب عندما يقيس درجات حرارة شخص مريض اجري له عملية جراحية ليس بالضرورة أن تكون في فترات زمنية متساوية وهكذا. فإذا ما فرضنا بأن الميل في المستوى يسير على نحو ثابت (انظر الشكل رقم (1.1))، فإن النمو في المستوى يكون متناسباً مع حجم الفترات الزمنية بين المشاهدات، الآن لو نأخذ فترتين متجاورتين $(t-1, t)$ و $(t-2, t-1)$ ونفرض أننا أخذنا منهما عينتين على التوالي N_t و N_{t-1} ، فمن تشابه المثلثين (انظر الشكل (1.1)) (Jalil, 1988) يكون:

$$\frac{\beta_t}{N_t} = \frac{\beta_{t-1}}{N_{t-1}}$$

ومنها نجد أن عامل الميل في المستوى عند الزمن t يعبر عنه كالآتي:

$$\beta_t = \frac{N_t}{N_{t-1}} \beta_{t-1} \dots\dots\dots(1.6)$$



" الشكل (1.1) يوضح علاقة عامل الميل عند الزمن $t, t-1$ "

ولكي تبقى الصيغة الخطية ولنحصل على نتائج مقبولة ودقيقة يجب أن لا تكون الفروقات بين (N_{t-1}, N_t) كبيرة جداً. ولأن التغير في الميل يمكن أن يحصل في أية لحظة، وبإضافة (Super Impose) الخطأ العشوائي $\delta\beta_t$ لمعادلة الميل (1.6)، وبذلك نحصل على:

$$\beta_t = \frac{N_t}{N_{t-1}} \beta_{t-1} + \delta\beta_t, \quad \delta\beta_t \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma^2 r\beta)$$

يمكن الآن التعبير عن النموذج بشكل كامل كالآتي:

$$\begin{aligned} \text{معادلة الملاحظة} \quad y_t = \mu_t + \varepsilon_t & \quad \varepsilon_t \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma^2) \\ \text{معادلة النظام} \quad \begin{cases} \mu_t = \mu_{t-1} + \beta_t + \delta\mu_t \\ \beta_t = \frac{N_t}{N_{t-1}} \beta_{t-1} + \delta\beta_t \end{cases} & \quad \begin{cases} \delta\mu_t \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma^2 r\mu) \\ \delta\beta_t \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma^2 r\beta) \end{cases} \end{aligned}$$

ويلاحظ بأنه عندما يكون $(N_t = N_{t-1}; t=1, 2, \dots)$ نحصل على النموذج الحركي الخطي في العلاقة (1.5) لأزمنة متساوية مما يعزز قولنا أعلاه ويعطي الشمولية لهذا النموذج.

1.3 مسألة الترشيح: The Filtering Problem

تتضمن مسألة الترشيح تقدير الحالة (State) لنظام تصادفي ذي مشاهدات مشوبة بأخطاء (Noise Perturbed Observations). تتطور الحالة في هذا النظام طبقاً إلى معادلة فرقية (أو تفاضلية) تصادفية ، وفيه مشاهدات تكون بشكل عام دالة لحالة العملية مضافاً إليها الاضطراب (Disturbance). هذه الدالة لا يمكن إيجاد المعكوس لها لتعوض عن الحالة (حتى في حالة عدم وجود اضطراب في المشاهدات Exact Observations). وهذا يشار إليه عادةً كحالة من المشاهدات الجزئية. مسألة الترشيح تتضمن تقدير الإشارة (Signal) عند أية لحظة زمنية باستخدام المشاهدات السابقة أو التاريخية (Historical data) للعملية إلى حد تلك اللحظة. كمثال بسيط، تأمل نموذج نمو المجتمع (Population Growth Model). افرض أن $X(t)$ تمثل مجتمعاً معيناً عند الزمن t ($t \geq 0$). أبسط نموذج يمثل هذه الحالة لنمو المجتمع نجده من خلال فرض أن معدل النمو يتناسب مع المجتمع الحالي (Current Population) (أنظر Brigo , 1996). وهذا يمكن أن يترجم بواسطة المعادلة التفاضلية الاعتيادية:

$$\dot{X}(t) = kX(t), \quad X(0) = X_0, \quad k \geq 0$$

وبالاعتماد على بعض التطبيقات، افرض أن كل من k ، X_0 ثوابت محددة. عندئذٍ ربما نقرر جعل X_0 لتكون متغيراً عشوائياً، ونمذجة نمو المجتمع عن طريق الأخذ بالحساب تشويش العملية $(v_1(t), t \geq 0)$ ، وهكذا.

$$\dot{X}(t) = (k + v_1(t))X(t), \quad X(0) = X_0, \quad k \geq 0$$

والآن افرض أننا لا نستطيع مشاهدة $X(t)$ مباشرة (direct) وبدون أخطاء ولكن نستطيع فقط مشاهدة $X(t)$ المشوبة (أو ذات تشويش) أي:

$$Y_t = X(t) + v_2(t)$$

حيث أن $\{v_2(t), t \geq 0\}$ تمثل تشويشاً ثانياً للعملية ويطلق عليه خطأ المشاهدة (Observation Error) في الزمن t .

إن مسألة الترشيح في هذا المثال تتعلق بتقدير $X(t)$ استناداً على البيانات الحالية ومعلومات سابقة عن العملية العشوائية $\{D(s): 0 \leq s \leq t\}$. بشكل عام، في نطاق دراستنا، الحالة $X(t)$ سوف تتطور طبقاً لمعادلة تفاضلية تصادفية (Stochastic Differential Equation) تعرف بعملية الانتشار (Diffusion Process)، الذي له تركيب أكثر تعقيداً من المثال أعلاه. المشاهدات كذلك يكون لها تركيب أكثر تعقيداً بشكل عام.

إذا كان تطور الحالة $X(t)$ والمشاهدات $Y(t)$ موصوفتين بعلاقات خطية، تحت بعض الافتراضات التي تحدد بشكل كامل السلوك الاحتمالي للشرط البدائي (Initial Condition) X_0 والحل للمسألة يعرف بمرشح كالمن (Kalman Filter). هذا المرشح يتضمن مجموعة منتهية من المعادلات التفاضلية التي تسمح بتحديث (Update) المقدرات التي تتضمن في كل نقطة زمنية مشاهدات جديدة (بشكل أكثر دقة، إذا كان النظام يتطور في زمن متقطع سوف يكون لدينا مجموعة من المعادلات الفرقية، بينما في الزمن المستمر يكون لدينا مجموعة من المعادلات التفاضلية العشوائية). في هذه الحالة يكون المرشح الأمثل (Optimal Filter) محدداً ببعده منتهي (Finite). بالرغم من أن مرشح كالمن الأمثل يعمل فقط في نطاق الأنظمة الخطية، فإنه يحقق بشكل عام فائدة كبيرة في تطبيقات كثيرة.

وقد استخدم مرشح كالمن في ترشيح بيانات الأقمار الصناعية في تطبيقات جو الأرض والفضاء الذي حوله (Aerospace)، وفي تطبيقات تنبؤ مستوى الماء وما موجود تحت الماء (أنظر Brigo, 1996).

أما في الوقت الحاضر، فيطبق الترشيح الخطي في حقول كثيرة للهندسة وبالأخص في هندسة الاتصالات والاقتصاد وفي مجالات الفضاء.

أما بالنسبة للأنظمة اللاخطية فإن مسألة الترشيح اللاخطي بشكل عام تكون أكثر تعقيداً بسبب أن نتائج الترشيح اللاخطي تكون ذات أبعاد غير منتهية بشكل عام. وتكون الأبعاد المنتهية للمرشح معرفة بشكل غير دقيق كمرشح يحتوي على مجموعة منتهية من المعادلات التفاضلية التي تقوم بتحديث التوزيع اللاحق للحالة التي تستند على المشاهدات الماضية. بشكل عام لا يوجد مثل هذه المجموعة المنتهية من المعادلات في مسألة الترشيح اللاخطي. في مثل هذه الحالة الحل (Solution) لا يمكن أن ينجز بواسطة حاسوب ذو ذاكرة محدودة.

الحل لمسألة الترشيح في زمن مستمر يكون من خلال دالة كثافة شرطية (Conditional Density) توصف من قبل الإحصائيين بواسطة معادلة تفاضلية جزئية

تصادفية. وهذه بشكل عام تمثل معادلة ذات أبعاد غير منتهية، بمعنى أن حلها لا يمكن أن يميز بواسطة حل لمجموعة منتهية من المعادلات التفاضلية (التصادفية).
 أفضل طريقة تقريب معروفة لإيجاد معالجة لهذا البعد غير المنتهي يكون بواسطة ما يسمى بمرشح كالمن الموسع (Extended Kalman Filter) ومختصراً EKF. إن (EKF) يمكن إيجاده بواسطة التقريب الخطي (Linearization) لدوال X , Y حول التقديرات الحالية (Current Estimates) ومن ثم تطبيق أسلوب الترشيح الخطي. هذه الطريقة تتحقق عادةً على أساس اعتبارات موجهة (Heuristic Considerations)، ولا تكون ذات نتائج مرضية، إلا في حالة كون تشويش المشاهدات صغيراً. اختبار آخر لحالة اللاخطية يكون حول ما يعرف بمرشح الكثافة ذات الافتراض الطبيعي (Gaussian Assumed-Density Filter) (GADF).
 بعبارة أخرى، المرشح الأمثل يمكن أن يكون مميزاً بواسطة عدد كبير من المعلمات. وبعد ذلك يكون من الممكن اختيار عدد محدود من هذه المعلمات المميزة وإهمال الأخرى حسب الأولوية وأهمية هذه المعلمات المختارة وهكذا.

1.4 مرشح كالمن المتقطع: The Discrete Kalman Filter

في عام 1960 نشر كالمن بحثه المشهور وصف فيه ما توصل من نتائج وهو الحل التعاقبي لمسألة ترشيح خطي لبيانات في أزمنة متقطعة متساوية. ولكن الأسلوب الذي استخدمه في التوصل إلى هذه النتائج كان معقداً، ومنذ ذلك الوقت ولحد الآن أصبح مرشح كالمن الموضوع الواسع للبحث والتطبيق، خصوصاً في مجال الملاحة المستقلة (Autonomous or Assisted Navigation).

مرشح كالمن هو مجموعة من العلاقات الرياضية التعاقبية التي توفر لنا الحل الكفوء لمسألة التقدير الخطي لأنظمة دايناميكية أو حركية. ويجب أن لاننسى أن كالمن حصل على نتائجه باستخدام طريقة المربعات الصغرى.

المرشح يكون فعالاً جداً في بعض المظاهر: فهو يعطينا التقديرات بأنواعها الثلاث وهي الترشيح والتنبؤ والتمهيد. هناك مصادر كثيرة تتناول موضوع مرشح كالمن بشكل تفصيلي مثل: (Jacobs,1993;Brown and Hwang, 1992;Lewis, 1986; Maybeck, 1979;) Gelb, 1974 ... الخ).

❖ العملية المراد تقديرها: The Process to be Estimated

مرشح كالمن يعنون المسألة العامة لمحاولة تقدير الحالة $\theta \in R^k$ لعملية سيطرة (Control Process) ذات الزمن المتقطع التي تحدد بواسطة المعادلة الفرقية (التصادفية)

الخطية مع معادلة مشاهدات $y \in R^n$ لحالة العملية (أنظر Welch and Bishop, 2002) بالصيغة الآتية :

$$y_t = F_t \theta_t + v_t \quad \dots(1.7)$$

$$\theta_t = G_t \theta_{t-1} + w_t \quad \dots(1.8)$$

المتغيرات العشوائية w_t, v_t تمثل تشويش المشاهدة والعملية على التوالي ويفترض أن تكون كل واحدة منهما غير مترابطة (uncorrelated) ومستقلة عن الأخرى وعن المتغيرات الأخرى، ولهما توزيع احتمالي طبيعي كآتي:

$$v_t \sim N(0, R) \quad \dots(1.9)$$

$$w_t \sim N(0, Q) \quad \dots(1.10)$$

المصفوفة G_t ذات البعد $(k \times k)$ في المعادلة الفرقية (1.8) تربط الحالة في الزمن $(t-1)$ مع الحالة في الزمن t . والمصفوفة F_t ذات البعد $(n \times k)$ في معادلة المشاهدة (1.7) تربط الحالة θ_t المجهولة بالمشاهدة y_t المشوبة وهي توضح حالة النظام أو العملية الملحوظة (Observed) وليس الحالة الحقيقية التي لا يمكن معرفتها بشكل دقيق (Exact).

1.5 مرشح كالمن الموسع: (EKF)

كما بينا في الفقرة السابقة، أن مرشح كالمن يمثل مسألة عامة لتقدير الحالة $\theta \in R^k$ لعملية السيطرة التي تحدد بواسطة معادلات تصادفية خطية (في الزمن المنقطع). لكن ماذا يحدث إذا كانت إحدى هذه العلاقات غير خطية، وأن إحدى حالات النموذج اللاخطي هي:

$$y_t = f_t(\theta_t) + v_t \quad \dots(1.11)$$

$$\theta_t = g_t(\theta_{t-1}) + w_t \quad \dots(1.12)$$

عندئذٍ نحصل على ما يسمى بمرشح كالمن الموسع أو غير الخطي (أنظر Welch and Bishop, 2002). ونظراً لكون شكل المرشح اللاخطي معقداً وليس سهلاً في التطبيق على عكس المرشح الخطي، ولهذا لا بد من تقريب هذا المرشح باستخدام مفكوك سلسلة تايلر لتحويل التقدير إلى خطي (Linearize-Estimate) حول التقدير الحالي باستخدام المشتقات الجزئية لدوال المشاهدة والنظام لحساب التقديرات من خلال شكل العلاقات اللاخطية أعلاه.

حيث أن المتغيرات العشوائية w_t, v_t مرة أخرى تمثل تشويش القياس والعملية ولهم شكل التوزيع كما في (1.9) و (1.10) على التوالي.

في هذه الحالة الدالة غير الخطية $f_t(.)$ في معادلة المشاهدة (1.11) تربط متغير الحالة θ_t مع المشاهدة y_t . والدالة غير الخطية $g_t(.)$ في المعادلة الفرقية (1.12) تربط متغير الحالة θ_{t-1} عند الزمن السابق ($t-1$) مع الحالة θ_t الحالية عند الزمن (t).

من المهم أن نلاحظ أن تعقيداً آخر يظهر في EKF وهو أن التوزيعات (أو دوال الكثافة في الحالة المستمرة) لمتغيرات عشوائية مختلفة لا يكون لها توزيع طبيعي بعد القيام بالتحويلات إلى خطية.

إن EKF يكون ببساطة مقدر لحالة العملية θ_t وأن هذا المقدر تقريباً يكون أمثل (Optimal) لقاعدة بيز بواسطة التقريب الخطي. لكن بعض الدراسات ذات الأهمية تمت من قبل (Julier and Jeffrey, 1996) في تطوير الاختلاف (Variation) في EKF، باستخدام الطرائق التقريبية التي تحافظ على التوزيعات الطبيعية من خلال التحويلات اللاخطية.

1.6 تكوين النموذج الحركي الخطي :

لفرض توضيح كيفية الحصول على النموذج الحركي الخطي بصيغته التي تناولناها في بحثنا ، لابد من الإشارة الى أن هذا النموذج يمثل حالة خاصة من نماذج فضاء الحالة (State Space Models) ، وكما هو معروف فان نماذج فضاء الحالة نحصل عليها من نماذج المعادلات الفرقية (Difference Equation Models) (لاحظ Kanjilal , 1995) وكالاتي:

1. نموذج فضاء الحالة بدون تشويش القياس:

State Space Model without Measurement Noise :

نحصل على نموذج فضاء الحالة بدون تشويش القياس من المعادلة الفرقية الاتية :

$$y(k) + a_1y(k-1) + \dots + a_ny(k-n) = b_0u(k-1) + b_1u(k-2) + \dots + b_nu(k-n-1) \quad \dots(1.13)$$

وهذا النموذج يوضح العلاقة بين المخرجات y في الزمن الحالي k و n من الأزمنة السابقة مع المدخلات u ل $(n+1)$ من الأزمنة السابقة مبتدئاً بالزمن $(k-1)$.
وعليه وبعد سلسلة من العمليات الحسابية نحصل على نموذج فضاء الحالة الاتي :

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k) \quad \dots(1.14)$$

$$y(k) = C'x(k) + Du(k) \quad \dots(1.15)$$

حيث أن:-

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}, \quad C' = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \\ D=0$$

$$\begin{bmatrix} (\lambda)_1 x \\ (\lambda)_2 x \\ \vdots \\ (\lambda)_{1+n} x \end{bmatrix} = (\lambda)x$$

المعادلات (1.14) و(1.15) تسمى بالشكل القانوني لمعادلات الحالة التي لها الأهمية الخاصة في نظرية النظام (System Theory). العلاقة (1.14) تمثل تطور حالة النظام الداخلي في الزمن $(k+1)$ بدلالة الزمن السابق (k) بعد عملية الإدخال (Input). والعلاقة (1.15) توضح مخرجات العملية (Process) في الزمن k المقابلة للمدخلات.

2. نموذج فضاء الحالة بوجود تشويش القياس:

State Space Model with Measurement Noise :

نحصل على نموذج فضاء الحالة بوجود تشويش القياس من المعادلة الفرقية الآتية :

$$\left. \begin{aligned} y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) \\ = b_0 u(k-1) + b_1 u(k-2) + \dots + b_n u(k-n-1) \\ + e(k) + c_1 e(k-1) + \dots + c_n e(k-n) \end{aligned} \right\} \dots (1.16)$$

حيث أن u و y تمثلان المدخلات والمخرجات على التوالي كما في المعادلة (1.13) وأن e تمثل التشويش أو الضوضاء العشوائي نتيجة لعملية الإدخال أو التغيرات العشوائية التي تطرأ على المدخلات.

وعليه وبعد سلسلة من العمليات الحسابية نحصل على نموذج فضاء الحالة الآتي :

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k) + se(k) \quad \dots(1.17)$$

$$y(k) = C' x(k) + e(k) \quad \dots(1.18)$$

إذا كانت هناك قياسات المخرجات (أو المشاهدات) مشوبة بتشويش أو ضوضاء

عشوائي إضافي v ، فإن مخرجات القياس (y) يمكن أن يعبر عنها كآتي:

$$y^*(k) = y(k) + v(k)$$

(للمزيد من المعلومات لاحظ Kanjilal, 1995).

يمكن الآن كتابة النموذج الخطي لفضاء الحالة كالآتي:

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k) + se(k) \quad \dots(1.19)$$

$$y^*(k) = C' x(k) + e(k) + v(k) \quad \dots(1.20)$$

حيث أن A, b, C معرفة أعلاه وأن :

$$s = \begin{bmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n - a_n \\ 0 \end{bmatrix}$$

من المعادلات (1.19) و (1.20) اذا فرضنا أن :

$$y(k) = y_t, x(k) = \theta_t, A=G, e(k) = w_t, C' = F_t, v(k) = v_t$$

عندئذ بالإمكان تحويل نموذج فضاء الحالة المعرف في المعادلات (1.19) و (1.20) إلى النموذج الحركي الخطي (DLM) الذي عرفه (Harrison and Stevens, 1976) بالصيغة الآتية:

$$Y_t = F_t \theta_t + v_t \quad \dots(1.21)$$

$$\theta_t = G \theta_{t-1} + w_t \quad \dots (1.22)$$

من هنا واضح أن النموذج الحركي الخطي (DLM) هو حالة خاصة من نموذج فضاء الحالة (State Space Model)

الآن يمكن توضيح العكس وذلك بتحويل أي نموذج حركي خطي إلى أحد نماذج المعادلات الفرقية وكالآتي:

نأخذ النموذج الحركي الخطي (نموذج التدرج) الآتي:

$$y_t = \theta_t + \varepsilon_t \quad \dots(1.23)$$

$$\theta_t = \theta_{t-1} + \delta_t \quad \dots(1.24)$$

وهو أبسط حالات النموذج الحركي الخطي.

عندئذٍ من المعادلات (1.23) و(1.24) نحصل على:

$$\begin{aligned} y_t &= \theta_{t-1} + \delta_t + \varepsilon_t \\ \because y_t &= \theta_t + \varepsilon_t \\ \Rightarrow y_{t-1} &= \theta_{t-1} + \varepsilon_{t-1} \\ \Rightarrow y_t &= y_{t-1} - \varepsilon_{t-1} + \delta_t + \varepsilon_t \\ \Rightarrow y_t &= y_{t-1} + \Delta_t - \varepsilon_{t-1} \quad \dots (1.25) \end{aligned}$$

حيث أن: $\Delta_t = \delta_t + \varepsilon_t$

نلاحظ أن المعادلة (1.25) تمثل معادلة فرقية .
والآن إذا أخذنا نموذجاً حركياً خطياً آخر مثل

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + e_t \\ \mu_t &= \mu_{t-1} + \beta_t + \delta\mu_t \\ \beta_t &= \beta_{t-1} + \delta\beta_t \end{aligned}$$

من المعادلات أعلاه نحصل على:

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \delta\beta_t + \delta\mu_t + e_t \\ \because y_t &= \mu_t + e_t \\ \Rightarrow y_{t-1} &= \mu_{t-1} + e_{t-1} \Rightarrow \mu_{t-1} = y_{t-1} - e_{t-1} \\ y_t &= y_{t-1} - e_{t-1} + \beta_{t-1} + \delta\beta_t + \delta\mu_t + e_t \\ \because y_t &= \mu_t + e_t \\ \Rightarrow y_{t-2} &= \mu_{t-2} + e_{t-2} \Rightarrow \mu_{t-2} = y_{t-2} - e_{t-2} \end{aligned}$$

كذلك

$$\begin{aligned} y_{t-1} &= \mu_{t-2} + \beta_{t-2} + \delta\beta_{t-1} + \delta\mu_{t-1} + e_{t-1} \\ \because \mu_{t-1} &= \mu_{t-2} + \beta_{t-1} + \delta\mu_{t-1} \\ \Rightarrow \mu_{t-2} &= \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \delta\mu_{t-1} \\ \Rightarrow y_{t-1} &= \mu_{t-1} - \beta_{t-1} - \delta\mu_{t-1} + \beta_{t-2} + \delta\beta_{t-1} + \delta\mu_{t-1} + e_{t-1} \end{aligned}$$